Soutien pour le cours de probabilités appliquées

Exercices

1 Session 4 (rappel)

Exercice 2. *Considerons la fonction suivante:*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [-2,2] \\ 1 & si\ x \in [2,3] \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Est-ce que c'est la fonction de densité d'une variable continue? Prouver.

Exercice 3. *La loi d'une variable discrète X est définie comme*

$$P(X = x) = \begin{cases} cx & si\ x = 2,4,6 \\ c(x-2) & si\ x = 8 \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

ou $c = const.$

1. *Trouver c*
2. *Trouver $F(5)$ (F — la fonction de la répartition)*
3. *Calculer $\mathbb{E}[X]$*
4. *Calculer $\mathbb{E}[X^2]$*
5. *Calculer $Var[4-3X]$.*

Exercice 4. *On sait que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(X < 1.645) \approx 0.95$. Considerons une variable $Y = 3X + 2$. Trouver α tel que $\mathbb{P}(Y < \alpha) \approx 0.95$.*

Exercice 5 (Exam 2017). *Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$. On considère la variable V égale à U avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et à 1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Déterminer puis répresenter graphiquement la fonction de répartition de la variable V. Calculer l'espérance de la variable V.*

Exercice 6 (Exam 2015). *Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$, $\alpha \geq 0$ et A un événemenet de probabilité x, $0 < x < 1$. On suppose que l'événement A est indépendant de la variable U.*

On parie dur la réalisation de A. Si A se réalise, le gain est $X = \alpha U^2$. Sinon, le gain est $X = -U$ (on perd U). On dit que le pari est favorable si l'espérance de gain est positive.

1. *Déterminer la fonction de répartition de la loi de la variable X.*
2. *Déterminer la densité de la loi de X*
3. *Justifier que X peut s'écrire de la manière suivante*
$$X = \alpha U^2 \mathbb{1}_A - U \mathbb{1}_{\bar{A}}$$
4. *Montrer que X est intégrable*
5. *Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$. Sous quelle condition portant sur α le pari est-il favorable?*
6. *Calculer $Var[X]$. Pour quelle valeur de x la variance est-elle maximale?*
7. *Calculer la covariance de X et de U. (**Rappel:** covariance de X et Y est définie comme $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$).*

2 Session 5 (distribution jointe)

Exercice 1. *On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité jointe*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[1 + xy\mathbb{1}_{-1 \le x, y \le 1}.\right]$$

Determiner la loi de X et de Y.

Exercice 2. *On a deux variables X_1 and X_2 indépendantes, qui suivent la loi exponentielle avec les parametres λ_1 et λ_2. Trouver la distribution $Z = \frac{X_1}{X_2}$. Calculer $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$.*

Exercice 3 (Exam 2016). *On considère une variable aléatoire de loi de densité*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = y\mathbb{1}_{[0,1)}(y) + \frac{1}{2} e^{1-y} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(y)$$

1. *Soit $F(t)$ la fonction de répartition de cette loi. Montrer, que nous avons*

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & \forall t \in [0,1] \\ 1 - \frac{1}{2} e^{1-t} & \forall t \ge 1 \end{cases}$$

2. *Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y_1 = \exp(-X/2)$ vérifie*

$$F_1(t) = t^2 \quad \forall t \in [0,1]$$

3. *Montrer qu'il existe $p \in (0,1)$ tel que*

$$F(t) = pF_1(t) + (1-p)F_2(t),$$

où F_2 et la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y_2 = 1 + X$.

4. *Soit p la valeur trouvée précédemment. On considère la variable aléatoire Y définie par*

$$Y = V\sqrt{U} + (1-V)(1+X),$$

où U est une variable aléatoire uniforme sur $(0,1)$, V est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et U, V, X sont mutuellement indépendantes. Calculer l'espérance des variables aléatoires Y et Y^2.

5. *Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.*

6. *On dispose d'un générateur aléatoire retourant uniquement des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Ecrire un algorithme de simulation e la loi de densité $f(y)$ (on notera `rexp` le générateur aléatoire de loi exponentielle).*